MATEMATICA 1° anno

Insiemi

Un **INSIEME** rappresenta un raggruppamento ben definito di enti, ciascuno dei quali è un **ELEMENTO** dell'insieme.

Dato un insieme e un elemento deve potersi decidere con certezza se **l'elemento appartiene o non appartiene all'insieme**: ha senso parlare dell'insieme dei fiumi italiani più lunghi di 200 km, invece " i grandi fiumi italiani" non formano un insieme.

Un insieme è individuato quando si conoscono singolarmente i suoi elementi o perché elencati o perché assegnati mediante una **PROPRIETA' CARATTERISTICA**. Ad esempio l'insieme (3 ,4, 5, 6) si individua assegnando la proprietà caratteristica dai suoi elementi : numeri naturali maggiori di 2 e minori di 7. Un insieme può essere **FINITO** (come quello precedente), **INFINITO** (ad esempio i numeri pari) O **VUOTO** (l'insieme dei numeri pari che finiscono per 9 o l'insieme dei divisori di 24 maggiori di 30) . Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di B è anche elemento di A, allora B è **un sottoinsieme di A**.

Dati due insieme A e B, si chiama loro **INTERSEZIONE** l'insieme degli elementi appartenenti contemporaneamente sia ad A che a B. Invece **l'UNIONE** di degli insiemi A e B è l'insieme degli elementi appartenenti ad A o a B, cioè ad almeno uno degli insieme dati.

Ad esempio **l'insieme dei divisori** di 24 è dato da A = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)

Invece **l'insieme dei divisori** di 32 è dato da B = (1, 2, 4, 8, 16, 32)

L'insieme intersezione di A e B sarà dato da C = (1, 2, 4, 8)

L'insieme unione di A e B sarà dato da C = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32)

Sia A l'insieme A = (3 ,4, 5, 6, 7, 8) dei numeri naturali maggiori di 2 e minori di 9 e B = (4, 6, 8) dei numeri naturali PARI maggiori di 2 e minori di 9, B è un sottoinsieme di A. Il numero di elementi di B è minore del numero di elementi di A e ciò è normale poiché stiamo trattando insiemi finiti.

Si pensi invece all'insieme infinito di tutti i numeri naturali N e all' insieme D, di tutti i numeri dispari, anche esso infinito. E' evidente che l'insieme D (1, 3, 5, 7, 9……..) è un sottoinsieme dell'insieme N (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11……) eppure ad ogni singolo elemento di N è associabile in corrispondenza biunivoca un elemento di D (n ed 2n+1), cioè i due insiemi sono **EQUIPOTENTI**.

Ciò che caratterizza gli insiemi infiniti è proprio questo, che può accadere che un insieme è equipotente con un suo sottoinsieme.

Le quattro operazioni

L'addizione e la moltiplicazione sono **LEGGI DI COMPOSIZIONE INTERNA** per l'insieme dei numeri naturali. Non lo sono in generale per l'insieme dei numeri naturali né **la sottrazione** (si deve ampliare l'insieme dei numeri naturali N e creare l'insieme dei numeri relativi Z) né **la divisione** (si deve ampliare l'insieme dei numeri relativi Z cioè numeri interi positivi, negativi e lo zero e creare l'insieme dei numeri razionali Q)

L'elevamento a potenza è una legge di composizione interna, ovunque definita, per l'insieme dei numeri naturali.

Proprietà delle potenze: Il **prodotto di più potenze di uguale base** è una potenza che ha la stessa base e per esponente la somma degli esponenti. $4^2 * 4^5 = 4^{2+5} = 4^7$

La **potenza di una potenza** è uguale ad una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti

$$(3^2)^3 = 3^{2*3} = 3^6$$

Il **quoziente di due potenze di uguale base** è una potenza che ha la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$4^8 : 4^5 = 4^{8-5} = 4^3$$

La potenza con esponente zero, di un qualsiasi numero diverso da zero è uguale a 1. $3^0 = 3^{1-1} = 3^1 * 3^{-1} = 3 : 3 = 3 * 1/3 = 1$

La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

La **potenza ad esponente negativo** è uguale alla frazione che ha per numeratore 1 e per denominatore la potenza della stessa base con esponente positivo di stesso valore assoluto dell' esponente negativo.

Un numero si dice **PRIMO** se ha per divisori solo sé stesso e l'unità.

Due numeri si dicono **PRIMI TRA DI LORO** se hanno per divisore comune solo l'unità.

Il **Massimo Comune Divisore MCD** di due o più numeri è il maggiore tra i numeri, detti DIVISORI, contenuti esattamente in tutti i numeri dati. Per determinare il MCD di due o più numeri, questi si scompongono in FATTORI PRIMI e si calcola IL PRODOTTO DEI FATTORI PRIMI COMUNI, CIASCUNO DI ESSI PRESO UNA SOLA VOLTA CON IL MINIMO

ESPONENTE CON CUI FIGURA.

Il **minimo comune multiplo mcm** di due o più numeri è il minore tra i numeri, detti MULTIPLI; che contengono esattamente tutti i numeri dati. Per determinare il mcm di due o più numeri, questi si scompongono in FATTORI PRIMI e si calcola IL PRODOTTO DEI FATTORI PRIMI COMUNI E NON COMUNI, CIASCUNO DI ESSI PRESO UNA SOLA VOLTA CON IL MAGGIORE ESPONENTE.

Nell'insieme dei **numeri relativi Z la SOTTRAZIONE** (come anche l'addizione e la moltiplicazione) è sempre legge di composizione interna.

Due numeri relativi si dicono OPPOSTI se la loro SOMMA è 0. **Zero è l'elemento NEUTRO dell'ADDIZIONE**

(+3) + (-3) = 3 - 3 = 0

La divisione, (come anche l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e l'elevamento a potenza) è legge di composizione interna nell'insieme dei numeri razionali relativi, lo ZERO ESCLUSO.

Due numeri razionali si dicono **INVERSI** se il loro prodotto è 1. **L'unità 1 è l'elemento NEUTRO della MOLTIPLICAZIONE**

3 * 1/3 = 1

Proprietà invariantiva delle frazioni: Moltiplicando, o dividendo, i due termini di una frazione per uno stesso numero DIVERSO DA ZERO; si ottiene una FRAZIONE EQUIVALENTE ALLA DATA

$$\frac{3}{4} = \frac{3 * 5}{4 * 5} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{30}{20} = \frac{30 : 10}{20 : 10} = \frac{3}{2}$$

Una frazione si dice **IRRIDUCIBILE o RIDOTTA AI MINIMI TERMINI** quando i suoi termini sono PRIMI TRA DI LORO.

Per ridurre una frazione ai minimi termini si devono dividere numeratore e denominatore per il loro MCD

Classe di equivalenza

$\frac{30}{20}$ ……… $\frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ frazioni equivalenti

Per operare con le frazioni (cioè per confrontarle, sommarle ecc) occorre che siano frazioni con LO STESSO DENOMINATORE.

Regola per ridurre più frazioni al minimo comune denominatore

1) Si riducono le frazioni ai minimi termini
2) Si cerca il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni così ridotte
3) Si cerca il quoziente fra questo mcm e ciascun denominatore delle frazioni ridotte
4) Si moltiplica il numeratore corrispondente di ciascuna frazione per il quoziente ottenendo così il nuovo numeratore e si dà per denominatore il mcm trovato.

Per CONFRONTARE due o più frazioni, si riducono queste, prima allo steso denominatore e, poi, si confrontano i numeratori delle frazioni così ottenute, equivalenti a quelle date.

Per ADDIZIONARE (o sottrarre) più frazioni, si riducono queste al minimo comune denominatore, quindi si forma una frazione avente per numeratore la somma (o la differenza) dei nuovi numeratori delle frazioni e per denominatore il minimo comune denominatore trovato (cioè il mcm dei denominatori)

Per MOLTIPLICARE due o più frazioni tra di loro si forma una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Per DIVIDERE una frazione per un'altra, si moltiplica la prima per l'inversa della seconda.

Per ELEVARE A POTENZA una frazione si eleva a quella potenza il numeratore e il denominatore.

Si dice FRAZIONE DECIMALE una frazione avente per denominatore una potenza di base 10.

Per trasformare una frazione qualsiasi in numero decimale , si divide il numeratore per il denominatore

Se la divisione HA TERMINE (si arriva ad un resto nullo) diciamo che la frazione genera un NUMERO DECIMALE LIMITATO.

Se la divisione NON HA TERMINE (per quanto si prosegua nelle successive divisioni non si trova mai un resto nullo) e si osserva che nel quoziente e nei resti vi sono cifre che si ripetono periodicamente, si dirà che la frazione ha generato un NUMERO DECIMALE ILLIMITATO PERIODICO.

I successivi resti di una divisione sono sempre minori del divisore, perciò dopo un certo numero di divisioni parziali si dovrà ripresentare un resto già ottenuto precedentemente , cosicché tutti i resti che seguono si ripeteranno nello stesso ordine e si ripeteranno pure le cifre del quoziente.

Si ha un numero decimale periodico semplice se le cifre del PERIODO iniziano subito dopo la virgola; si ha un numero decimale periodico misto se prima delle cifre del periodo iniziano subito dopo la virgola ci sono le cifre dell'ANTIPERIODO.

Una frazione (ridotta ai minimi termini) trasformata in numero decimale dà luogo a un numero decimale finito se il denominatore della frazione ridotta contiene come FATTORI PRIMI SOLO 2 o 5 oppure entrambi e le rispettive potenze.

Una frazione (ridotta ai minimi termini) trasformata in numero decimale dà luogo a un numero decimale periodico semplice se il denominatore della frazione ridotta NON contiene come FATTORI PRIMI né 2 né 5.

Una frazione (ridotta ai minimi termini) trasformata in numero decimale dà luogo a un numero decimale periodico misto se il denominatore della frazione ridotta contiene come FATTORI PRIMI 2 e 5 e altri numeri primi.

Frazione generatrice di un numero decimale: Ogni numero decimale finito si può scrivere sotto forma di frazione, moltiplicando e dividendo per il numero costituito da 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.

La frazione generatrice di un numero periodico semplice è una frazione che ha per numeratore la differenza tra il numero formato dalla parte intera, se c'è, seguita dal periodo e il numero formato dalla parte intera e per denominatore il numero formato da tanti 9, quante sono le cifre del periodo.

La frazione generatrice di un numero periodico misto è una frazione che ha per numeratore il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo seguite dalle cifre del periodo meno il numero formato dalle cifre che precedono il periodo.

Ha per denominatore il numero formato da tanti 9, quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Ogni numero decimale periodico con periodo uguale a 9 è uguale al numero decimale limitato che si ottiene da quello dato aumentando di una unità l'ultima cifra precedente il periodo e trascurando il rimanente.

Così un numero decimale limitato può essere trasformato in un numero decimale illimitato (diminuendo di una unità l'ultima cifra decimale e facendo seguire il numero ottenuto dal periodo 9)

CONCLUSIONE: OGNI NUMERO RAZIONALE SI PUO' RAPPRESENTARE MEDIANTE UN NUMERO DECIMALE ILLIMITATO PERIODICO:

Numeri Relativi

I numeri positivi, i numeri negativi e lo zero formano l'insieme dei numeri relativi.

Si stabiliscono delle regole in modo da conservare, fin che sia possibile le proprietà delle operazioni dell'aritmetica.

Il valore assoluto di un numero relativo non è altro che il numero stesso privato del segno + o -

Ogni numero relativo possiede **UN SEGNO e UN VALORE ASSOLUTO**.

Due numeri aventi lo stesso valore assoluto e segni contrari si dicono **OPPOSTI**. La loro somma è zero.

Ogni numero positivo è maggiore di qualsiasi numero negativo. Dati due numeri positivi il maggiore è quello che ha valore assoluto maggiore. Dati due numeri negativi il maggiore è quello che ha valore assoluto minore.

LO ZERO è MAGGIORE DI OGNI NUMERO NEGATIVO E MINORE DI OGNI NUMERO POSITIVO.

Considerando la **retta orientata**, dati due numeri relativi, il maggiore è quello che si trova alla destra dell'altro.

La somma di due numeri relativi CONCORDI (cioè che hanno lo stesso segno) è il numero relativo che ha lo stesso segno degli addendi e per valore assoluto la somma dei loro valori assoluti.

(- 4) + (- 7) = -11

La somma di due numeri relativi SCONCORDI (cioè che hanno segno opposto) è il numero relativo che ha il segno dell'addendo di maggiore valore assoluto e per valore assoluto la differenza dei valori assoluti dei numeri dati.

(- 5) + (+11) = +6

La somma di due numeri opposti è zero. La somma di un numero relativo e di zero è uguale al primo numero.

La somma di più numeri relativi, in un dato ordine, è il numero relativo che si ottiene aggiungendo al primo il secondo, alla somma ottenuta il terzo e così via finché si siano esauriti i numeri dati. Il numero zero si può sempre trascurare come termine di una somma.

PROPRIETA' COMMUTATIVA: La somma di più numeri relativi non cambia comunque si cambi l'ordine degli addendi.

PROPRIETA' ASSOCIATIVA:La somma di più numeri relativi non cambia se ad alcuni si sostituisce la loro somma effettuata.

Quando davanti a una parentesi , che racchiude una somma, vi è il segno +, si può togliere la parentesi sopprimendo il segno + che la precede e lasciando inalterati i segni dei suoi addendi. Se in una somma compaiono due addendi opposti, essi si possono senz'altro elidere. Per eseguire **la somma di più numeri relativi** si sommano tra loro separatamente i numeri positivi e quelli negativi e poi si sommano i due numeri relativi DISCORDI così ottenuti. L'opposto di una somma si ottiene cambiando il segno a tutti i suoi addendi. **La differenza di due numeri relativi**, presi in un dato ordine, è un terzo numero che aggiunto al secondo numero dà per somma il primo numero. La differenza di due numeri relativi esiste sempre e si ottiene aggiungendo al primo numero l'opposto del secondo numero.

Proprietà invariantiva della sottrazione: La differenza di due numeri relativi non cambia aggiungendo o togliendo uno stesso numero tanto al minuendo che al sottraendo.

Si chiama **somma algebrica** un insieme di numeri relativi legati tra loro da segni di addizione e di sottrazione.

Quando davanti ad una parentesi, che racchiude una somma, vi è il segno meno (-) , si può togliere la parentesi sopprimendo il segno meno (-) che la precede, purché si cambino i segni a tutti gli addendi della somma.

Prodotto di due numeri relativi: Si chiama prodotto di due numeri relativi il numero relativo che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei due numeri dati e per segno il (+) o il (-) a secondo che i due numeri siano concordi o discordi. Quando i due fattori hanno lo stesso segno il prodotto è positivo. Quando i due fattori hanno segno opposto il prodotto è negativo.

(+) * (-) = (-)

(-) * (-) = (+)

(+) * (+) = (+)

(-) * (+) = (-)

Quando uno dei fattori di un prodotto è zero, è nullo anche il prodotto.

Legge di annullamento del prodotto: Se il prodotto di due o più fattori è uguale a zero almeno uno dei fattori deve essere uguale a zero. Il prodotto di un numero relativo per +1 è uguale al numero stesso. Il prodotto di un numero relativo per -1 è uguale all'opposto di quel numero.

Per ottenere il prodotto di più numeri relativi **DIVERSI DA ZERO** si trova il prodotto dei valori assoluti dei fattori e si dà il segno + o - a seconda che i fattori negativi sono in numero pari (o nullo) o in numero dispari.

PROPRIETA' COMMUTATIVA: Il prodotto di più numeri relativi non cambia mutando l'ordine dei fattori.

PROPRIETA' ASSOCIATIVA: Il prodotto di più numeri relativi non cambia se ad alcuni di essi si sostituisce il loro prodotto effettuato

PROPRIETA' DISTRIBUITIVA RISPETTO ALLA SOMMA: Per moltiplicare una somma algebrica per un numero si può moltiplicare ciascuno degli addendi della somma per quel numero e poi sommare i prodotti parziali ottenuti.

Si dice quoziente di due numeri relativi, presi in un dato ordine, di cui il secondo SIA DIVERSO DA ZERO, un terzo numero (appunto il quoziente) che moltiplicato per il secondo (divisore) dà per prodotto il primo numero (dividendo) .

Il quoziente di due numeri relativi, di cui il secondo sia diverso da zero, esiste sempre e si ottiene moltiplicando il primo per l'inverso (o reciproco) del secondo.

Il quoziente di due numeri relativi ha per valore assoluto il quoziente dei loro valori assoluti e per segno il (+) o il (-) a secondo che i due numeri siano concordi o discordi.

Il quoziente di un numero relativo per +1 è uguale al numero stesso.

Il quoziente di un numero relativo per -1 è uguale all'opposto di quel numero.

Il quoziente di un numero relativo per sé stesso è uguale a +1.

Il quoziente di un numero relativo per il suo opposto è uguale a -1 .

Potenze

La potenza di un numero positivo è sempre positiva e la potenza di un numero negativo è positiva se l'esponente è un numero pari ed è negativa se l'esponente è un numero dispari.